MATHEMATICA ™ Palettes - Eine für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht adaptierte/adaptierbare Computeralgebra Lernumgebung

Alfred DOMINIK, BORG Salzburg
Karl Josef FUCHS, Universität Salzburg

0. Einleitung

Zweifelsohne nimmt Österreich eine Vorreiterrolle beim Einsatz von Computeralgebrasystemen im Mathematikunterricht ein [FUCHS, 1996]. Die begleitende didaktische Forschung in Österreich konzentriert sich dabei weitestgehend auf das Algebrasystem DERIVE™, welches durch eine Generallizenz des österreichischen Bildungsministeriums für alle Gymnasiallehrer verfügbar ist. Durch die fokussierende Sicht aber wird der Blick auf Entwicklungen und Entwicklungsmöglichkeiten in anderen Computeralgebrasystemen für den Mathematikunterricht bedauerlicherweise vernachlässigt. Wie gewinnbringend es aber sein kann, den Blick auf andere Systeme auszuweiten, wollen wir mit unseren MATHEMATICA™ - Palettes zeigen, einer Lernumgebung [DOMINIK, FUCHS, 1999], die wir dafür entwickeln, Computeralgebrasysteme näher an die Schüler heranzubringen. [BUCHBERGER, 1990; STRICKLAND und AL-JUMEILY 1999]

1. MATHEMATICA™ - Palettes und der Prozess des Lernens von Mathematik

Durch das ‚Wegräumen' von hinderlichen systembedingten technischen Hürden (man denke etwa an das Eingeben und Editieren ‚langer' einzeiliger Ausdrücke)

beim Lösen von Aufgaben können sich die Schüler stärker auf den eigentlichen Problemlöseprozess konzentrieren.
Der Prozess des Mathematikunterrichts, seine Planung, Durchführung und Zielsetzung rücken damit wieder stärker in den Mittelpunkt unserer Betrachtung.

1.1. Das genetische Prinzip

Ein Mathematikunterricht mit MATHEMATICA™ - Palettes Lernumgebungen knüpft deutlich am Vorverständnis der Schüler an, führt zu allgemeineren Begriffen und Strategien über intuitive und heuristische Ansätze und zur Einbettung von Aufgabenstellungen in größere Problemkontexte außerhalb und innerhalb der Mathematik [WITTMANN 1981, FÜHRER, 1997]. Durch ausgewählte Aufgaben wird den Schülern die Chance gegeben, ‚Teile der Mathematik' wieder und neu zu entdecken. Die einzelnen Schritte zur Problemlösung werden ausführlich dokumentiert, Schülereingabe und Antwort der Lernumgebung können zusätzlich durch verschiedenfarbige Felder differenziert werden. Sollte nun der Eindruck entstanden sein, die Schüler können in einem Mathematikunterricht mit MATHEMATICA™ - Palettes Lernumgebungen völlig sich allein überlassen blieben, so wäre dies ganz verfehlt.

Der Lehrer muss z u n ä c h s t Aufgaben, die es in sämtlichen approbierten Schulbüchern in ausreichender Zahl gibt, auswählen, um eine allmähliche Entfaltung von Ideen und Strategien von einem einfachen Ausgangspunkt aus, möglich zu machen.

Er muss den Prozess Unterricht s t e u e r n, damit es den Schülern gelingt Strukturen und Muster in mathematischen Aufgaben aufzufinden [REICHEL, 1995].

Dies ist eine überaus kräfteraubende Aufgabe wie ich aus langjähriger Erfahrung im Unterricht mit Algebrasystemen berichten kann, die aber auch pädagogisches Geschick und Fachkompetenz des Lehrers einfordern.
Der Lehrer muss s c h l i e ß l i c h in einem zusammenfassenden Rückblick auf das Erarbeitete, durch eine klare Gliederung, dazu beitragen, dass das Vorangegangene ‚durchsichtiger' erscheint.

Auch eine Ausweitung unserer Lernumgebung auf anderer Unterrichtsfächer haben wir als äußerst gewinnbringend erfahren und sehen sie als zielführend an.

1.2 Ordnungsstrukturen und Fundamentale Ideen

Durch den Einsatz von Computeralgebrasystemen wurde sicherlich die Diskussion über die Bedeutung von Ordnungsprinzipien, die dazu beitragen sollen, den Mathematikunterricht zu entlasten, sinnstiftend zu gestalten und zu legitimieren, neu belebt [HUMENBERGER; 1993; ASPETSBERGER, FUCHS, SCHWEIGER, 1995; FUCHS, 1998]. Zwei grundlegende Prinzipien, die in zahlreichen Katalogen Fundamentaler Ideen genannt werden [SCHWEIGER, 1992], rücken besonders in den Mittelpunkt der Betrachtung, die Idee der Modellbildung (Mathematische Funktionen als Modelle zur Beschreibung von Realsituationen) und die Idee der funktionalen Abhängigkeit, die durch die funktionale Arbeitsweise von Computeralgebrasystemen geradezu notwendig ins Blickfeld rückt.
So sind wir davon überzeugt, dass sich in Experimenten mit reellen Funktionen auf der graphischen, numerischen und symbolischen Repräsentationsebene in einem Mathematikunterricht mit MATHEMATICA™ - Palettes Lernumgebungen grundlegende Techniken und Strategien zur ‚Erfassung' und zum ‚Verfügbarmachen' der einzelnen Funktionen aufbauen.

Erklärungsmodelle für das Verhalten (Symmetrie, Periodizität - ‚Teleskopphänomene') einzelner Funktionen können über Parametervariationen, die sich leicht durchführen lassen, gewonnen, Gemeinsamkeiten einzelner Funktionen können durch Vergleiche ‚herausgefiltert' werden. [DÖRFLER, 1991].
Weitere - in einem zeitgemäßen Mathematikunterricht - wünschenswerte Fahigkeiten wie numerisches Abschätzen sind Bestandteile der angesprochenen Experimente.

1.3 Das Modulprinzip

Das Arbeiten mit MATHEMATICA™ - Palettes Lernumgebungen ist durch ein begründetes und erkennendes Anwenden von Moduln oder Funktionsbausteinen gekennzeichnet. Erste Erfahrungen im Einsatz der Gleichungspalette in der Unterstufe haben gezeigt, dass das Handhaben der Funktionsbausteine, die durch einen Menüknopf aktiviert werden, von den Schülern als äußerst angenehm, aber nicht allzu schwierig angesehen wurde. Ein wirkliches Bedürfnis nach dem ‚Offenlegen der Module' bestand in dieser Altersstufe noch nicht, man vertraute darauf, dass Lehrermodule ‚funktionieren'. Natürlich sind wir uns durchaus der Tatsache bewusst, dass in der Oberstufe das Bedürfnis der Schüler nach ‚Offenlegung der Module' zunehmen wird und das Bedürfnis wachsen wird, vorgegebene Lernumgebungen zu erweitern.

Neben den explizit angesprochenen Ordnungsprinzipien beim Einsatz von Computeralgebrasystemen im Mathematikunterricht sind natürlich das Vorgehen nach dem Spiralprinzip, das bereits erwähnte Erschließen von Strategien über verschiedene Darstellungsmodi Elemente in einem Mathematikunterricht mit MATHEMATICA™ - Palettes Lernumgebungen.

2. Beispiele zum Einsatz von MATHEMATICA™ - Palettes (Palettes und Unterrichtspraxis)

Beispiel 2.1 – Lineares Gleichungssystem mit Formvariablen

Wir arbeiten mit folgender Palette zum Lösen von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten:

Die Palette beinhaltet Buttons

- zum Lösen des Gleichungssystems
- zum Testen auf algebraische Äquivalenz der sich aus dem Einsetzen des Lösungspaars in eine der gegebenen Gleichung ergebenden neuen Gleichung
- zur eventuellen graphischen Kontrolle des gefundenen Schnittpunktes

Wir lösen das Gleichungssystem

$\{2\,a\,x - 7\,y = 12,\ 5\,x - 7\,b\,y = -23\}$ mit den Formvariablen *a* und *b*.

Bemerkung: Die kursiv gedruckten Textteile sind nicht Teil des Verfahrens, sondern dienen nur zur Illustration der einzelnen Lösungsschritte. Um einen Eindruck vom graphischen Layout des Arbeitsblattes zu bekommen, sind Screenshots abgedruckt.

```
EingabeVonGleichung1[2 a x − 7 y == 12];
```
Eingabe der Gleichung 1

```
EingabeVonGleichung2[5 x − 7 b y == −23];
```
Eingabe der Gleichung 2

```
AddiereZeilenFaktor1Faktor2[5, −2 a]
```
Zeileneliminationsverfahren zum Eliminieren von a

```
5 (2 a x − 7 y) − 2 a (5 x − 7 b y) == 60 + 46 a
```
Ergebnis des letzten Schrittes

```
MultipliziereAus[5 (2 a x − 7 y)] − 2 a (5 x − 7 b y) == 60 + 46 a
```
Erster Term wird ausmultipliziert

```
10 a x − 35 y − 2 a (5 x − 7 b y) == 60 + 46 a
```
Ergebnis des letzten Schrittes

```
10 a x − 35 y − MultipliziereAus[2 a (5 x − 7 b y)] == 60 + 46 a
```
Zweiter Term wird ausmultipliziert

$-35\,y + 14\,a\,b\,y == 60 + 46\,a$

Ergebnis des letzten Schrittes

$7\,(-5 + 2\,a\,b)\,y == 60 + 46\,a$

y wurde herausgehoben

DivídiereBeideSeitenDurch[7 (−5 + 2 a b) y == 60 + 46 a, 7 (−5 + 2 a b)]

Die Gleichung wird nach y aufgelöst

$$y == \frac{60 + 46\,a}{7\,(-5 + 2\,a\,b)}$$

Ergebnis des letzten Schrittes

$$2\,a\,x - 7\,\frac{60 + 46\,a}{7\,(-5 + 2\,a\,b)} == 12$$

Der Wert für y wird in Gleichung 1 eingesetzt

$$\text{SubtrahiereVonBeidenSeiten}\left[-\frac{60 + 46\,a}{-5 + 2\,a\,b} + 2\,a\,x == 12,\ -\frac{60 + 46\,a}{-5 + 2\,a\,b}\right]$$

Die Gleichung wird nach x aufgelöst

$$2\,a\,x == 12 + \frac{60 + 46\,a}{-5 + 2\,a\,b},\ 2\,a$$

Ergebnis des letzten Schrittes

$$\text{DividiereBeideSeitenDurch}\left[2\,a\,x == 12 + \frac{60 + 46\,a}{-5 + 2\,a\,b},\ 2\,a\right]$$

Die Gleichung wird nach x aufgelöst

$$x == \frac{12 + \frac{60 + 46\,a}{-5 + 2\,a\,b}}{2\,a}$$

Ergebnis des letzten Schrittes

$$\text{TesteLösungspaarFürGleichung1}\left[\frac{12 + \frac{60+46\,a}{-5+2\,a\,b}}{2\,a},\ \frac{60 + 46\,a}{7\,(-5 + 2\,a\,b)}\right]$$

True

Lösungspaar wird für Gleichung 1 getestet

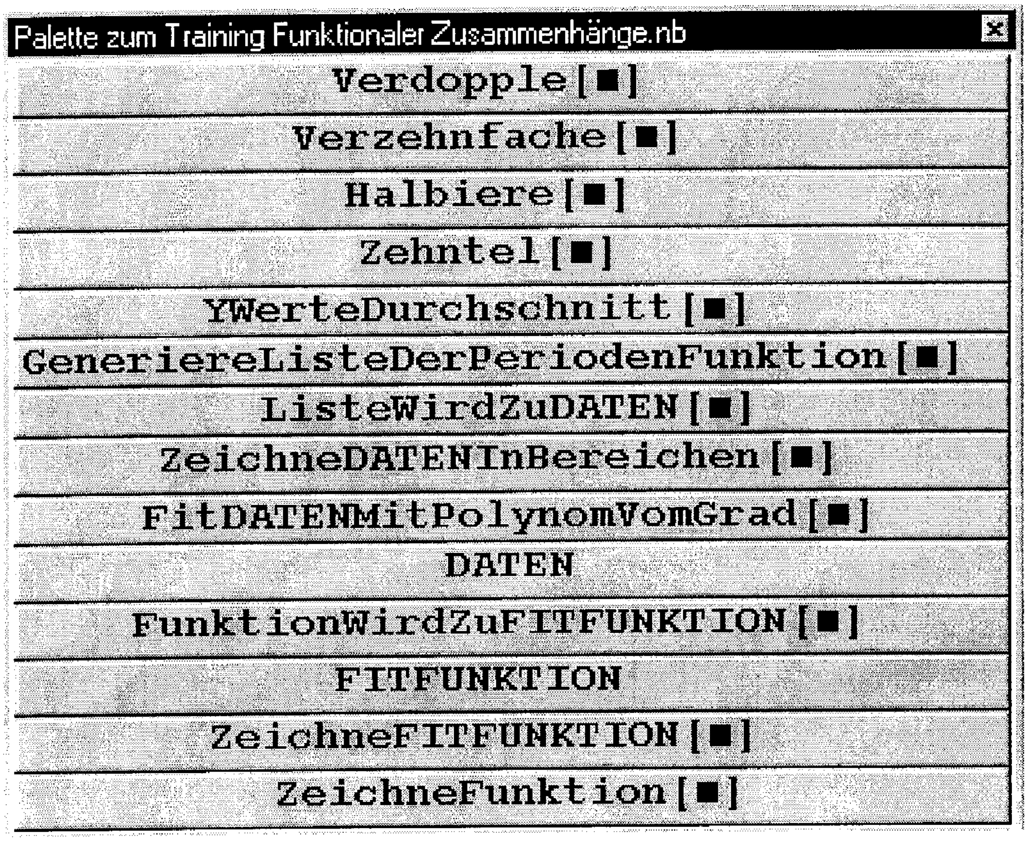
$$\text{TesteLösungspaarFürGleichung2}\left[\frac{12 + \frac{60+46\,a}{-5+2\,a\,b}}{2\,a},\ \frac{60 + 46\,a}{7\,(-5 + 2\,a\,b)}\right]$$

True

Lösungspaar wird für Gleichung 2 getestet

Beispiele 2.2 – Studium funktionaler Abhängigkeiten

Wir arbeiten mit folgender Palette :



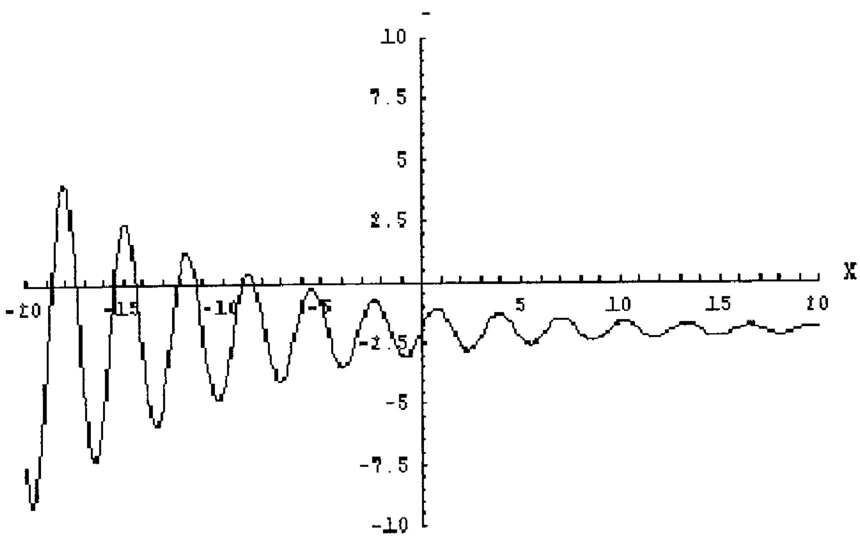
Die Palette beinhaltet

- Buttons zum Verdoppeln, Verzehnfachen etc. von „inneren“ und „äußeren“ Termen
- Buttons zum Errechnen des Mittelwertes von y-Werten eines Graphen
- Buttons zum Generieren einer Liste von Maxima
- Buttons zum Zeichnen von Listen und Funktionen
- Buttons zum Fitten von Listen nach Polynomfunktionen

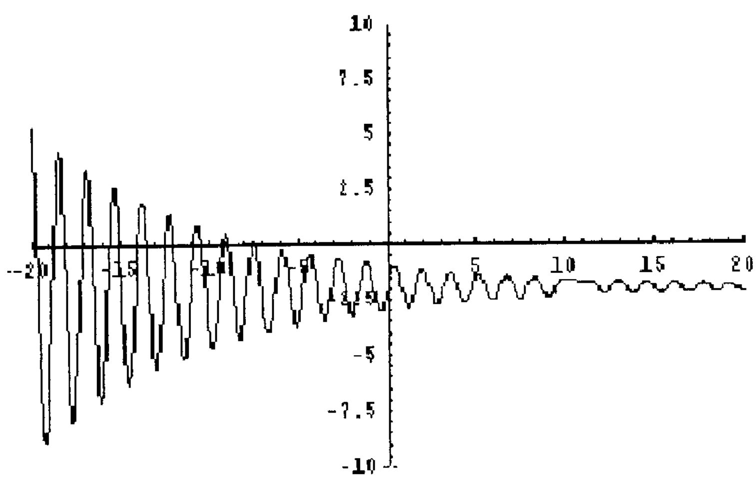
2.2.1 Ausbilden von Prototypen

Die Buttons Verdopple, Verzehnfache etc. können zum Ändern von Parametern zusammengesetzter und verketteter Funktionen verwendet werden. Dies dient beispielsweise bei Sinuskurven zur Veränderung der Amplitude, der Frequenz und der Verschiebung entlang der *Y*-Achse sowie dem Studium von Hüllkurven-Parametern. Ziel der Variationen ist das Ausbilden von Prototypen einzelner Funktionsklassen [DÖRFLER, 1991].

```
ZeichneFunktion[Exp[-x/10] * 1 Sin[2 x] - 2, -20, 20, -10, 10]
```

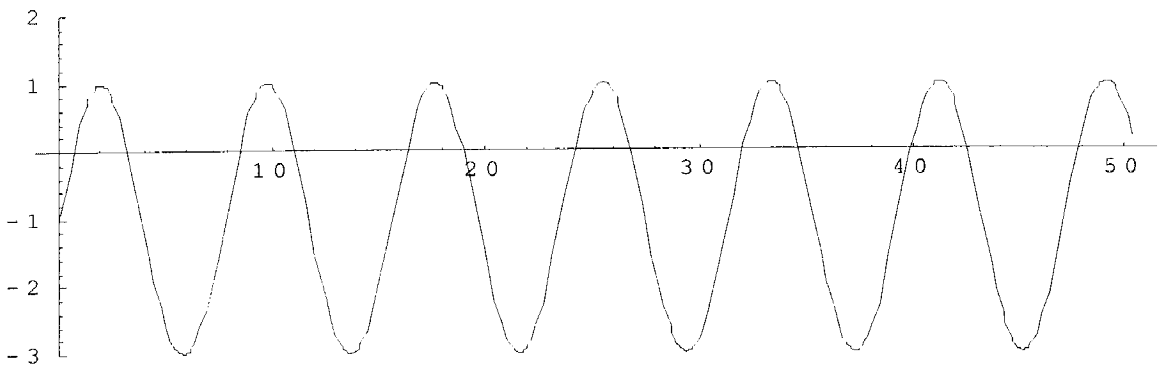



```
ZeichneFunktion[Exp[-x/10] * 1 Sin[4 x] - 2, -20, 20, -10, 10]
```



2.2.2 Strategien zum Auffinden der Struktur verketteter Funktionen

In Anlehnung an die Beispiele in „Lehrbuch der Mathematik 6“ [REICHEL, MÜLLER, LAUB, HANISCH, 1991] diskutieren wir die **Zusammensetzung und Verkettung von Funktionen** anhand 2er Beispiele:



Die Graphik ist frei auf dem Arbeitsblatt beweglich, somit kann die dargestellte Funktion sehr gut mit der im 10ten Arbeitsschritt gezeichneten Funktion verglichen werden.

Arbeitsschritte:

1) Durch Anwählen einer MATHEMATICA™-Graphik, Anklicken einzelner Punkte bei gedrückter Strg-Taste, Copy&Paste erstellen wir eine Liste der Maxima.
2) Die Liste wird dem Ausdruck DATEN zugewiesen.
3) Durch Bilden des Durchschnittes der Y-Werte erkennen wir die Amplitudenstreckung 2 und die Verschiebung um -1 auf der y-Achse
4) Daraus wird eine Liste der vermuteten Periodenfunktion erstellt (die Maxima liegen ja bei $\pi/2$, $\pi/2 + 1 * 2\pi$, $\pi/2 + 2 * 2\pi$ ...) und
5) dem Ausdruck DATEN zugewiesen.
6) DATEN werden gezeichnet und
7) nach einer Polynomfunktion (den Grad definiert der Benutzer) gefittet.

8) Die Fitfunktion wird dem Ausdruck FITFUNKTION zugewiesen.

9) DATEN und FITFUNKTION werden gezeichnet.

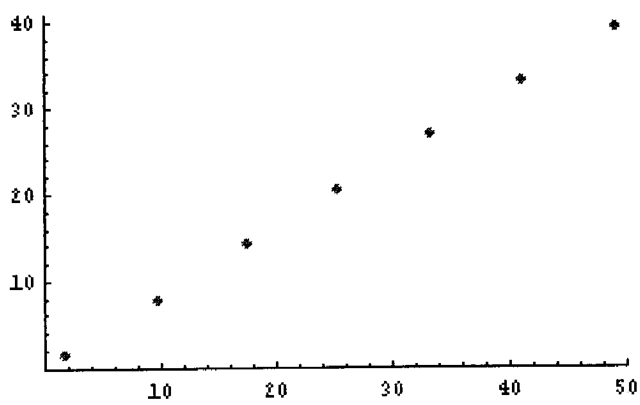
10) Die Funktion 2*Sin(FITFUNKTION)-1 wird gezeichnet

Bemerkung: Um die Darstellung nicht in die Länge zu ziehen, werden, im Unterschied zu Beispiel 1, nur Screenshots der wichtigsten Schritte gezeigt (Schritte 1, 4, 6, 7, 9, 10).

```
{{1.62996, 1.08939}, {9.72305, 1.0591},
{17.4397, 1.02881}, {25.3446, 1.02881},
{33.2495, 1.08939}, {41.1543, 1.02881},
{49.0592, 1.0591}}
```

$$\left\{\left\{1.62996, \frac{\pi}{2}\right\}, \left\{9.72305, \frac{5\pi}{2}\right\}, \left\{17.4397, \frac{9\pi}{2}\right\}, \left\{25.3446, \frac{13\pi}{2}\right\}, \left\{33.2495, \frac{17\pi}{2}\right\}, \left\{41.1543, \frac{21\pi}{2}\right\}, \left\{49.0592, \frac{25\pi}{2}\right\}\right\}$$

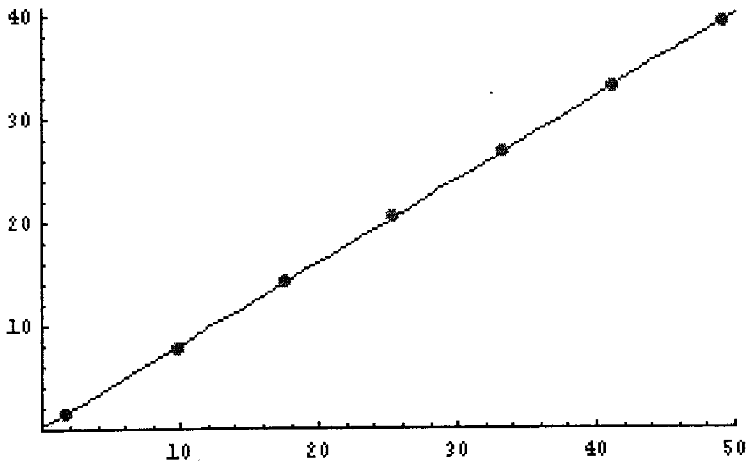
```
ZeichneDATENInBereichen[0, 50, 0, 13 Pi]
```



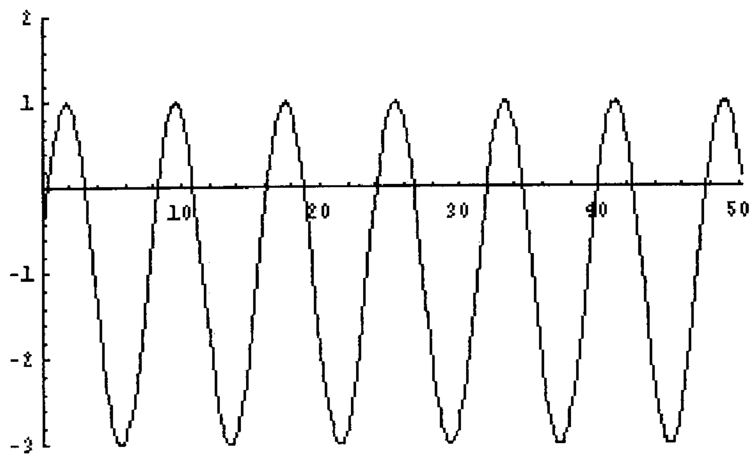

```
FitDATENMitPolynomVomGrad[1]
```

```
0.219784+0.796192 x
```

```
ZeichneFITFUNKTION[0, 50, 0, 13Pi]
```




```
ZeichneFunktion[2 Sin[FITFUNKTION] - 1,
 0, 16Pi, -3, 2]
```



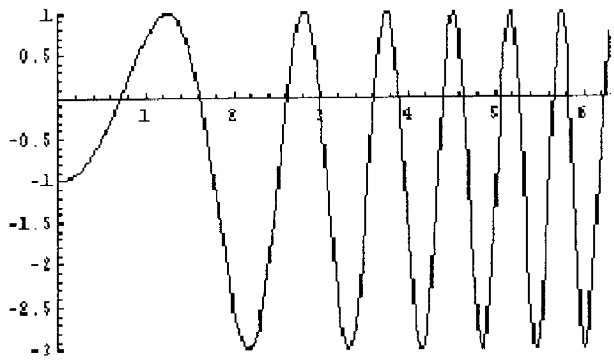
Es ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung des gegebenen Graphen mit dem Graphen der gefitteten Funktion.

Die Verkettung der Sinusfunktion mit der „inneren“ Funktion 0.8 x wird durch die Darstellungen

- der empirisch gefundenen Fitfunktion 0.219784+0.796192 * x und
- der „Gesamtfunktion“ 2 *Sin (FITFUNKTION)-1

sehr deutlich.

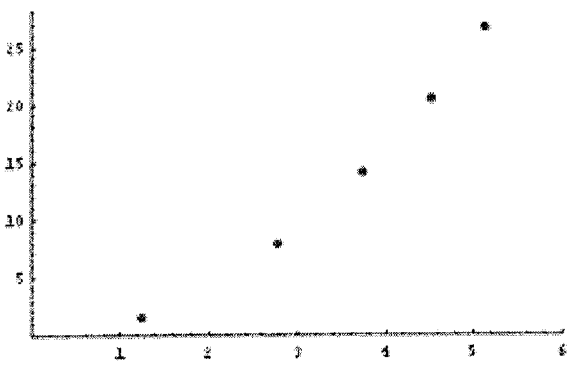
In analoger Weise zum ersten Beispiel untersuchen wir die Zusammensetzung und Verkettung von Funktionen anhand folgender Kurve:




```
{{1.2457, 1.03361}, {2.78145, 1.06042},
{3.74455, 1.06042}, {4.52544, 1.03361},
{5.15016, 1.03361}}
```

$$\left\{\left\{1.2457, \frac{\pi}{2}\right\}, \left\{2.78145, \frac{5\pi}{2}\right\}, \left\{3.74455, \frac{9\pi}{2}\right\}, \left\{4.52544, \frac{13\pi}{2}\right\}, \left\{5.15016, \frac{17\pi}{2}\right\}\right\}$$

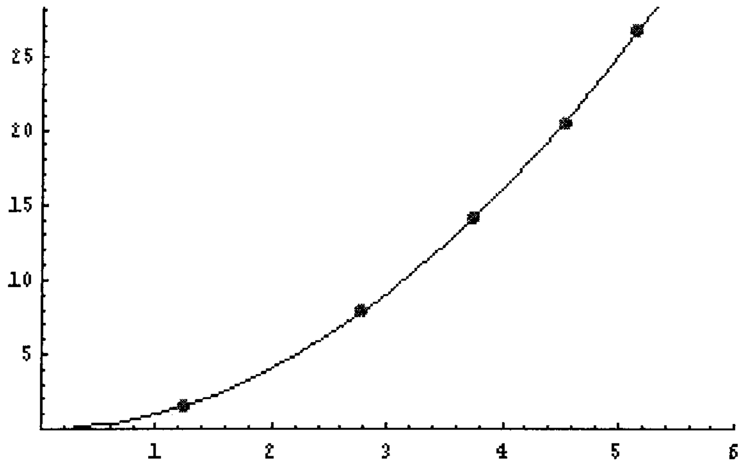
```
ZeichneDATENInBereichen[0, 6, 0, 9 Pi]
```



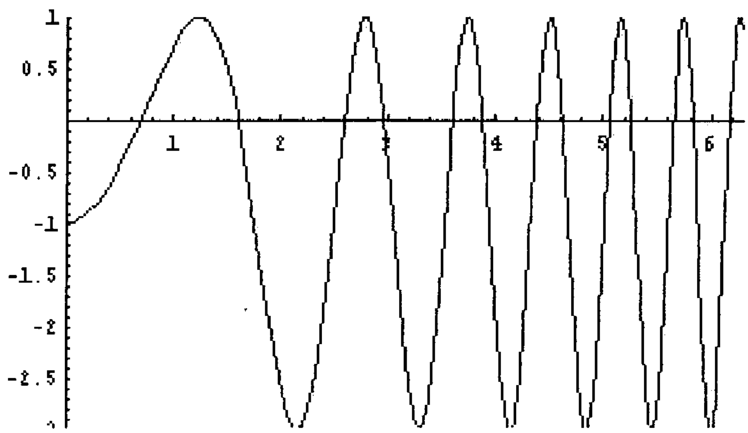

```
FitDATENMitPolynomVomGrad[2]
```

$$0.00969171 + 0.0249887\,x + 0.998404\,x^2$$

```
ZeichneFITFUNKTION[0, 6, 0, 9Pi]
```




```
ZeichneFunktion[2 Sin[FITFUNKTION] - 1,
 0, 2Pi, -3, 1]
```



Wiederum ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung des gegebenen Graphen mit dem Graphen der gefitteten Funktion.

Die Verkettung der Sinusfunktion mit der „inneren" Funktion x^2 wird durch die Darstellungen

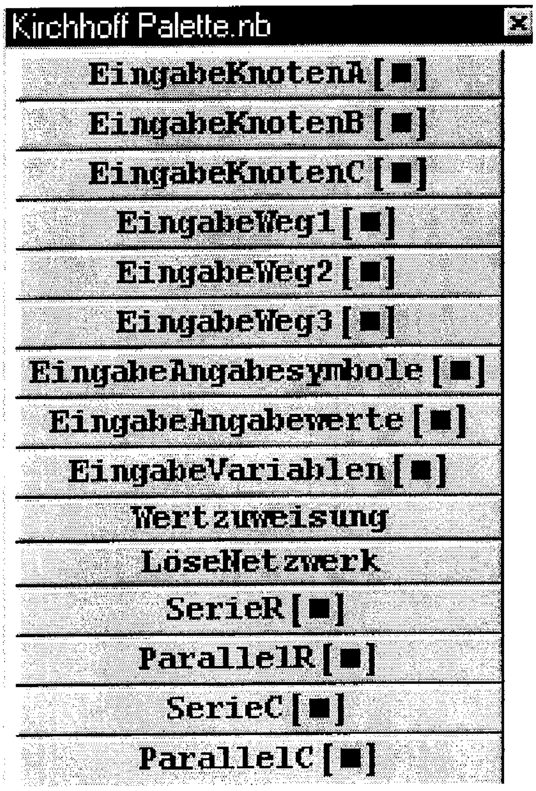
- der empirisch gefundenen quadratischen Fitfunktion mit vernachlässigbarem konstanten und linearen Teilausdruck und
- der „Gesamtfunktion" 2 *Sin (FITFUNKTION)-1

nahegelegt.

2.2.3 Strategien beim Lösen elektrischer Netzwerke

Das Lösen elektrischer Netzwerke ist oft ein mühsames Problem: Serien- und Parallelschaltungen müssen berechnet werden, ein lineares Gleichungssystem mit vielen Unbekannten ist aufzustellen und zu lösen. Bei herkömmlichen Lösungsansätzen liegt die Aufmerksamkeit der Schüler auf algebraischen Umformungstechniken, anstatt muster-orientiert (Stromknoten, Spannungskreis, Serien-, Parallelschaltung) vorzugehen. Obwohl es gute Computer-Programme gibt, die die bequeme Berechnung elektrischer Netzwerke ermöglichen, lernen die Schüler beim Einsatz derartiger Programme leider weder Mathematik noch Physik.

Wir haben zur Fokussierung auf muster-orientierte Strategien die folgende Palette erstellt:



Ein *Knoten* wird durch zu- und abfließende Ströme beschrieben, ein *Weg* durch die Spannungen und Spannungs-abfälle entlang eines geschlossenen Kreises.

Die Buttons EingabeAngabesymbole, EingabeAngabewerte und Eingabe-Variablen erlauben eine komfortable Behandlung gegebener Werte und zu berechnender Werte.

3. Ausblicke

Wir sind uns bewusst, dass noch Modifikationen an unserer Computeralgebraoberfläche notwendig sein werden und noch zahlreiche Begleituntersuchungen angestellt werden müssen. Nicht zuletzt zeigt uns aber bereits das internationale Echo, das wir auf die Vorstellung unserer Lernumgebung auf der ICTMT4 in Plymouth 1999 hatten [YOSHIOKA, FUCHS, NISHIZAWA, DOMINIK, 2000], dass es sich gelohnt hat, den Blick in der didaktischen Forschung über vertraute Werkzeuge hinaus anzustellen.

Literatur:

ASPETSBERGER, Klaus; FUCHS, Karl; SCHWEIGER, Fritz (1996): *Fundamental ideas and symbolic algebra.* In: The State of the Art S. 45-51. Bromley, Kent: Chartwell-Bratt

BUCHBERGER, Bruno (1990): *Should Students Learn Integration Rules?.* SIGSAM Bulletin 24 No. 1, S. 10-17

DOMINIK, Alfred; FUCHS, Karl Josef (1999): *MATHEMATICA-Palettes - A Methodical Way to Provoke into Using Mathematical Strategies.* ICTMT 4, University of Plymouth 1999

DÖRFLER, Willibald (1991): *Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium.* In: Schriftenreihe DdM 21, S. 51-75. Wien, Stuttgart: hpt/B.G. Teubner

FUCHS, Karl Josef (1996): *Computer im Mathematikunterricht - Erfahrungen und Gedanken.* In: Didaktikhefte der ÖMG, H. 26, S. 21-35

FUCHS, Karl Josef (1998): *Computeralgebra - Neue Perspektiven im Mathematikunterricht.* Habilitationsschrift Universität Salzburg

FÜHRER, Lutz (1997): *Pädagogik des Mathematikunterrichts.* Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg Verlag

HUMENBERGER, Johann (1993): *Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht.* Dissertation Universität Wien

REICHEL, Hans-Christian (1995): *Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik.* In: Wissenschaftliche Nachrichten, S. 20-25

REICHEL, Hans-Christian; MÜLLER, Robert; LAUB, Josef, HANISCH, Günter (1991): *Lehrbuch der Mathematik 6.* Wien: hpt

SCHWEIGER, Fritz (1992): *Fundamentale Ideen - Eine geistesgeschichtliche Studie.* In: JMD, 13, H 2/3, S. 199-214

STRICKLAND, Paul; AL-JUMEILY, Dhiya (1999): *A Computer Algebra System for Improving Student's Manipulation Skills in Algebra.* In: IJCAME, Vol. 6, No. 1, S. 17-24

YOSHIOKA, Takayoshi; FUCHS, Karl; NISHIZAWA, Hitoshi; DOMINIK, Alfred (2000): *Step by step instruction of symbolic calculation.* Paper for ACME2 2000

WITTMANN, Erich (1981): *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg Verlag

Anschrift der Verfasser:

Mag. Dipl.-Ing. Alfred DOMINIK	Univ. Doz. Prof. Mag. Dr. Karl Josef FUCHS
BORG Akademiestraße 21	Universität Salzburg
5020 SALZBURG	Hellbrunnerstraße 34
	5020 SALZBURG
webmaster@borg-akad.salzburg.at	karl.fuchs@sbg.ac.at